最短待ち行列に並ぶ通常客を持つ待ち行列システムにおける特別客の最適待機政策 (不確実性と意思決定の数理)

小柳, 淳二; 河合, 一

数理解析研究所講究録
第 1636 巻 2009 年 225-228

最短待ち行列に並ぶ通常客を持つ待ち行列システムにおける特別客の最適待機政策

鳥取大学大学院　*小柳　淳二　KOYANAGI Junji
鳥取大学大学院　河合　一　KAWAI Hajime

1　はじめに

同一のサーバを持つ２つの待ち行列システムにおいて，到着客がどちらの待ち行列に並ぶべきかは，様々な局面で議論されている．本研究では，一般客と特別客の２種類が到着する待ち行列システムで，一般客は短い待ち行列のほうにシステム到着直後に並んでいき，特別客のみ，しばらく様子をみてから行列に並ぶことができる場合を考える．

このような２つの待ち行列を持つシステムにおいて，到着客が短いほうの待ち行列に並ぶというのは，自然な選択ではあるが，サービス時間分布の種類によっては，これが必ずしも最適でないことは，Whitt[1] などで説明されている．Weber[2] では複数個の待ち行列からなるシステムで（サーバーは同一）サービス時間分布に IFR の仮定をおいた場合，最短の待ち行列に並ぶのがよいことが示されている．このような最短の待ち行列に並ぶ Shortest Queue Discipline と呼ばれる規律の最適性については，Johri[3] などでも議論されている．

一方，単一の待ち行列システムにおいて，一般客と特別客の２種類が到着する場合，特別客には，すぐに待ち行列に並ぶのではなく，行列が短くなってから並ぶことを選べるようにしたモデルを Mandelbaum[4] では扱っている．ただし，特別客の到着はまれで，一人しかシステム内にいない場合を扱っている．これは，空港のチェックインカウンターなどで，列に並んで待つのではなく，特別客用のラウンジなどで待ち，時間をおいて再度並ぶような状況を扱っているモデルと考えられる．このようなモデルを２つの並列待ち行列システムに拡張したものとして，小柳 [5] があるが，一般客は，それぞれの待ち行列に別々の到着過程で到着し，その待ち行列に並び，特別客のみ，いつ，どちらの待ち行列に入るかを選択できるものであった．

本研究では，一般客もどちらの待ち行列に入るかを選択でき，特別客は，並ぶ時期を選択できるという点で一般客より有利な場合を扱う．

2　モデルと定式化

サービス率 μ の指数サーバを持つ，２つの待ち行列システム１，２からなる待ち行列システムを考える，そこに一般客が到着率 λ のポアソン過程で到着する．到着した一般客は待ち行列が短いほうに並び（同じ行列長のときには，１に並ぶ），いったん並ぶと待ち行列の変更はできないものとする．

このシステムには，特別客も到着し，特別客はシステム外で単位時間あたり w のコストを支払うことで，待ち行列に入る決定を遅らせることができ，次の決定は，いずれかの行列長に変化があったときに行う．待ち行列に入ることを決定したならば，その行列の最後尾に入り，サービスが終了するまで単位時間あたり，$c\ (>w)$ のコストを払う．また行列に入る前に，サービスを受けることをあきらめて立ち去ることも可能であり，その決定にはコスト d を課せられるものとする．

ここでは総期待コストが最小になる特別客の政策について調べる．

待ち行列 1 の一方の行列長 i，他方の行列長 j （サービス中を含む）とすると，状態 (i,j) における最適総期待コスを $V(i,j)$ とすると以下の最適性方程式が成り立つ．

$$V(i,j)=\min\{c(i+1)/\mu, c(j+1)/\mu, W(i,j), d\}$$

$$W(i,j)=\begin{cases}\{w+\lambda V(i+1,j)+\mu V([i-1]^+,j)+\mu V(i,[j-1]^+)\}/\Lambda & (i\le j)\\ \{w+\lambda V(i,j+1)+\mu V([i-1]^+,j)+\mu V(i,[j-1]^+)\}/\Lambda & (i>j)\end{cases}$$

ここで，$\Lambda=2\mu+\lambda$, $[x]^+=\max\{x,0\}$ である．μ/Λ を μ のように再定義することで $\Lambda=1$ として一般性を失わない．

$V(i,j)$ は $V^0(i,j)\equiv 0$ として，以下の逐次近似法により求めることができる．

$$V^{n+1}(i,j)=\min\{c(i+1)/\mu, c(j+1)/\mu, W^{n+1}(i,j), d\}$$

$$W^{n+1}(i,j)=\begin{cases}w+\lambda V^n(i+1,j)+\mu V^n([i-1]^+,j)+\mu V^n(i,[j-1]^+) & (i\le j)\\ w+\lambda V^n(i,j+1)+\mu V^n([i-1]^+,j)+\mu V^n(i,[j-1]^+) & (i>j)\end{cases}$$

$V(i,j)$ は $\lim_{n\to\infty} V^n(i,j)$ として求められる．これを利用して $V(i,j)$ の性質を証明する．

3 最適政策の性質

最適コスト $V(i,j)$ には次の性質があることを証明する．

補題 1 $W(i,j)$ と $V(i,j)$ は以下の性質を持つ．

1. $V(i,j)$ と $W(i,j)$ は i,j に関して増加．
2. $W(i+1,j)-W(i,j)\le c/\mu$ かつ $V(i+1,j)-V(i,j)\le c/\mu$ である．
3. $W(i,j+1)-W(i,j)\le c/\mu$ かつ $V(i,j+1)-V(i,j)\le c/\mu$ である．□

証明)

帰納法を用いた 2. の証明のみ示す．

$V^0(i,j)$ では自明．$V^n(i,j)$ で 2 の性質を仮定すると，

$i<j$ のとき 状態 $(i+1,j)$ でも (i,j) でも新しい到着客は行列 1 に入るので，

$$\begin{aligned}&W^{n+1}(i+1,j)-W^{n+1}(i,j)\\&=\lambda\{V^n(i+2,j)-V^n(i+1,j)\}+\mu\{V^n(i,j)-V^n([i-1]^+,j)\}\\&\quad+\mu\{V^n(i+1,[j-1]^+)-V^n(i,[j-1]^+)\}\le c/\mu.\end{aligned}$$

$i=j$ のとき 新しい到着客は状態 $(i+1,j)$ では行列2に，状態 (i,j) では行列1に入るので

$$\begin{aligned}&W^{n+1}(i+1,j)-W^{n+1}(i,j)\\&=\lambda\{V^n(i+1,j+1)-V^n(i+1,j)\}+\mu\{V^n(i,j)-V^n([i-1]^+,j)\}\\&\quad+\mu\{V^n(i+1,[j-1]^+)-V^n(i,[j-1]^+)\}\le c/\mu.\end{aligned}$$

$i>j$ のときも同様に示すことができる.
$W^{n+1}(i+1,j)-W^{n+1}(i,j)\le c/\mu$ より，

$$\begin{aligned}&V^{n+1}(i+1,j)-V^{n+1}(i,j)\\&\le\max\{W^{n+1}(i+1,j)-W^{n+1}(i,j),c(i+2)/\mu-c(i+1)/\mu\}=c/\mu.\end{aligned}$$

となり，帰納法により $V^n(i,j)$ と $W^n(i,j)$ が補題の性質を満たすことがわかる．よって，極限値 $V(i,j)$ と $W(i,j)$ も同じ性質を持つ.

この補題から最適政策は以下の性質を持つことがわかる.（‘W’ は決定を遅らせる，‘i’ は行列 i に並ぶ，‘L’ はシステムから去ることをあらわす.）

定理 1 (i,j) での最適アクションと (k,j) $k>i$ での最適アクションとは次の関係がある.

1. (i,j) で ‘W’ が最適なら，(k,j) では ‘W’, ‘L’，‘2’ のいずれかが最適である.（‘1’ は最適ではない）
2. (i,j) で ‘L’ が最適なら, (k,j) でも ‘L’ が最適.
3. (i,j) で ‘2’ が最適なら, (k,j) でも ‘2’ が最適. □

証明）
2. 3. の性質は，アクション ‘L’ と ‘2’ に対するコストが i が変化しても変化せず，また $W(i,j)$ が i に関して増加であることから明らか.
1. の性質は $W(i,j)<c(i+1)/\mu$ ならば，補題により

$$W(k,j)\le W(i,j)+c(k-j)/\mu<c(i+1)/\mu+c(k-j)/\mu=c(k+1)/\mu$$

となることから ‘1’ は最適アクションにはなりえない. □
j に関しても同様の性質が成り立つことはあきらかである.
また，待ち行列の容量が有限であり，一般客はその容量を超えては到着しないが，特別客は行列容量を超えて並ぶことが可能という仮定のもとで，同様の定理を証明することができる.

4 数値例

最適政策を $\lambda=0.4$, $\mu=0.3$, $c=5$, $w=2.4$, $d=100$, 系内客数の最大値 20 の場合に求めると次のようになる．表の 10–20 は同じ最適アクションであることを示す.

この表から最適政策は定理の性質を満たしていることがわかる．すなわち，最適アクションは i の増大につれて，基本的に ‘1’ から ‘W’ に変化し，最終的に ‘2’ か ‘L’ に変化する. j の増大についても同様に ‘2’ から ‘W’ に変化し，最終的に ‘1’ か ‘L’ へと変化する.

表 1: 最適政策の数値例

$j\backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10–20
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	W	W	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	W	W	W	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	W	W	W	W	2	2	2	2	2
4	1	1	1	W	W	W	W	2	2	2	2
5	1	1	1	1	W	W	W	W	W	W	W
6	1	1	1	1	W	W	W	L	L	L	L
7	1	1	1	1	1	W	L	L	L	L	L
8	1	1	1	1	1	W	L	L	L	L	L
9	1	1	1	1	1	W	L	L	L	L	L
10–20	1	1	1	1	1	W	L	L	L	L	L

参考文献

[1] W. Whitt, “Deciding which queue to join: some counterexamples”, *Operations Research*, **34-1**, 55 (1986).

[2] R.R. Weber, “On the optimal assignment of customers to parallel servers”, *Journal of Applied Probability*, **15**, 406 (1978).

[3] P.K. Johri, “Minimizing the number of customers in queuing systems”, *European Journal of Operational Research*, **27**, 117 (1986).

[4] A. Mandelbaum and U. Yechiali, “Optimal entering rules for a customer with wait option at an $M/G/1$ queue”, *Management Science*, **29-2**, 174 (1983).

[5] J. Koyanagi and H. Kawai, “An optimal wait policy in two discrete time queueing systems”, *Proc. of Recent Advances in Stochastic Operations Research II*, 136, NAGOYA, JAPAN (2007).